Mehrpunktige Berührung eines Kreises mit Kegelschnitten.

INAUGURAL-DISSERTATION,

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Theodor Schindler,
aus Hof Eich bei Gelnhausen.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei. (R. Friedrich).
1882.

Isotrope Berührung eines Kreises mit Kegelschnitten.

Seinen lieben Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Da zur vollständigen Bestimmung eines Kegelschnitts 5 Bedingungen erforderlich sind, so lässt eine Osculation, d. h. möglichst innige Berührung desselben mit einer beliebigen Curve eine fünfpunktige Berührung zu, mit einem andern Kegelschnitt jedoch nur eine vierpunktige, indem zwei Kegelschnitte, welche 5 Punkte gemein haben, gänzlich zusammenfallen. Die mehrpunktige Berührung zwischen zwei Kegelschnitten lässt sich auch ohne Differentialrechnung in folgender von Salmon Fiedler gegebener Weise behandeln, indem sich 2 Kegelschnitte im Allgemeinen in 4 Punkten schneiden und durch Zusammenfallen dieser Punkte eine mehrpunktige Berührung entsteht.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher einen andern in 4 Punkten schneidet, lautet:

$$S - k\,L\,M = 0,$$

wo $S = 0$

die Gleichung eines festen Kegelschnitts,

$$L = 0,\ M = 0,$$

die Gleichungen zweier Graden bedeuten, die den Kegelschnitt in je 2 Punkten schneiden. Fallen zuerst 2 Schnittpunkte zusammen, so wird die eine der beiden Geraden zur gemeinschaftlichen Tangente T und die Gleichung des berührenden Kegelschnitts wird:

$$S - k\,T\,M = 0,$$

wo $T = 0$ eine Tangente des Kegelschnitts darstellt.

Geht ferner die Gerade $M = 0$ durch den Berührungspunkt $x_1\,y_1$ der Tangente, so fallen 3 der 4 Schnittpunkte in ihm

zusammen, und die obige Gleichung ist dann die eines Kegelschnitts, welcher den gegebenen im Punkte $x_1 y_1$ osculirt.

Die beiden Kegelschnitte haben endlich 4 zusammenfallende Punkte mit einander gemein, wenn die Geraden $M=0$ und $T=0$ zusammenfallen und die allgemeine Gleichung des zweiten Kegelschnitts lautet:

$$S - k\,T^2 = 0.$$

Ich habe im folgenden eine Betrachtung des in mancher Beziehung einfachsten Falles unternommen, nämlich der Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kreis mehrpunktig berühren und ausserdem gewissen Bedingungen unterworfen sind, wobei bei der 4punktigen Berührung noch eine und bei der 3punktigen noch zwei Bedingungen zur vollständigen Bestimmung hinzukommen dürfen.

I. Vierpunktige Berührung eines Kreises mit Kegelschnitten.

Zunächst wird es darauf ankommen, zu untersuchen, welcher Art diese Kegelschnitte sind, die mit einem Kreise eine 4punktige Berührung eingehen können. Gegenüber der Untersuchung betreffend die 4punktige Berührung von Kegelschnitten mit einem gegebenen Kegelschnitt eignet sich der Kreis deshalb besonders zu unserer Aufgabe, weil er sich in allen seinen Punkten gleichmässig verhält nnd daher unbeschadet der Allgemeinheit zulässt, dass wir den Berührungspunkt $x_1 y_1$ auf der Abscissenaxe annehmen.

Auch einen Punkt (ξ, η), durch welchen der Kegelschnitt vermöge der uns noch zu Gebote stehenden Bedingung hindurch gehen soll, dürfen wir auf die x-Axe verlegen, indem sich stets der Kreis, ohne seine Lage zum Coordinatensystem zu ändern, so drehen lässt, dass der Berührungspunkt mit dem Kreismittelpunkt und dem gegebenen Punkt (ξ, η) auf eine Gerade fällt.

Legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und ist der Kreis auf seinen Mittelpunkt bezogen, dargestellt durch

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

die Gleichung einer Kreistangente

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0,$$

so lautet die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher den Kreis in einem beliebigen Punkte 4punktig berührt:

$$(1) \ldots\ldots x^2 + y^2 - r^2 - k(x x_1 + y y_1 - r^2)^2 = 0.$$

Die hierin enthaltene Grösse k erhält, falls der Kegelschnitt durch den Punkt (ξ, η) gehen soll, aus der Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 - r^2 - k(\xi x_1 + \eta y_1 - r^2)^2 = 0$$

folgenden Werth:

$$k = \frac{\xi^2 + \eta^2 - r^2}{(\xi x_1 + \eta y_1 - r^2)^2}.$$

Nach Einführung dieses Werthes in Gl. (1) ergibt sich, wenn wir zugleich als Coordinaten des Berührungspunktes $\begin{cases} x_1 = -r \\ y_1 = 0 \end{cases}$ und des Punktes (ξ,η) $\begin{cases} \xi = \xi \\ \eta = 0 \end{cases}$ einsetzen,

$$(2\alpha) \ldots\ldots 2 r x^2 + y^2(\xi + r) - 2 x r(\xi - r) - 2 r^2 \xi = 0$$

als Gleichung des gesuchten Kegelschnitts.

Diese Gleichung stellt die Schaar aller möglichen Kegelschnitte dar, welche im Punkte B (Fig. 1) 4punktig berühren und durch einen Punkt auf der Abscissenaxe gehen, wenn man ξ alle möglichen Werthe durchlaufen lässt, d. h. wenn sich der Punkt (ξ, η) auf der Abscissenaxe bewegt.

Bildet man die Discriminante dieser Gleichung, so ereignet sich das Merkwürdige, dass für $\xi = \infty$ die Discriminante ebenfalls ∞ wird, während aus Gl. (2α) nach Multiplication mit 0 die Parabel: $y^2 - 2 r x - 2 r^2 = 0$ resultirt. Es scheint letzteres in offenem Widerspruch zu stehen mit den aus den Lehrbüchern bekannten Resultaten und lässt sich nur so erklären, dass in denselben stillschweigend endliche Coefficienten vorausgesetzt sind. Um daher diesem Anstosse zu begegnen, ver-

wandeln wir Gl. (2α) durch Division mit $(\xi + r)$ in eine Gleichung mit endlichen Coefficienten, so dass dieselbe folgende Gestalt annimmt:

$$(2\beta) \ldots\ldots\ldots \frac{2rx^2}{\xi + r} + y^2 - \frac{2xr(\xi - r)}{(\xi + r)} - \frac{2r^2\xi}{\xi + r} = 0.$$

Bildet man jetzt die Discriminante $B^2 - AA_1 = -\frac{2r}{\xi + r}$, so ergeben sich für positive Werthe von ξ und negativ kleinere Werthe als r, Ellipsen, welche für $\xi = \infty$ in eine Parabel übergehen; negativ grössere Werthe wie r erzeugen eine Schaar von Hyperbeln.

Da in der Gl. (2β) y nur auf der 2. Potenz vorkommt, so liegen die Kegelschnitte symmetrisch zu beiden Seiten der Abscissenaxe, d. h. eine der Hauptaxen des Kegelschnitts fällt mit derselben zusammen. Die Durchschnittspunkte der Gl. (2β) mit der Axe der x ergeben sich aus der Gleichung:

$$x^2 - x(\xi - r) - r\xi = 0,$$

$$x_1 = -r \quad x_2 = \xi,$$

woraus sofort der Werth der einen Hauptaxe $a = \frac{\xi + r}{2}$ erhalten wird. Die zweite Hauptaxe bestimmt sich aus Gl. (2β), wenn wir $x = \frac{\xi + r}{2}$ in dieselbe substituiren; es wird dann

$$y = b = \sqrt{a \cdot r}.$$

Gibt uns die Bildung der Discriminante allgemein Aufschluss, welcher Gattung die Kegelschnitte angehören, so bietet uns die Bestimmung der Axen noch den Vortheil, über die Gestalt der Kegelschnitte einige Aufklärung zu erhalten, indem sich für jeden Werth von ξ ein charakteristisches Axensystem ergibt.

Es ist speziell für

1) $\xi < r$:

$r > a = \frac{\xi + r}{2}$, daher

$b^2 = ar > a^2$, so dass

$b > a$,

d. h. das Axenverhältniss der Ellipse hat sich so gestaltet, dass die kleine Halbaxe zur grossen geworden ist und umgekehrt.

2) Für $\xi = -r$

wird $a = 0$, $b = 0$, was nichts anderes bedeutet, als dass der Kegelschnitt mit dem Berührungspunkt B zusammengefallen ist.

Die Werthe des ξ von 0 bis $-r$ liefern daher ebenfalls Ellipsen mit dem erwähnten Axenverhältniss; diese Ellipsen werden jedoch immer kleiner an Flächeninhalt und degeneriren schliesslich für $\xi = -r$ in einen Punkt. Analytisch ergibt sich dieses deshalb nicht aus Gl. (2α), weil ein Punkt einen Kreis nicht mehr als eben in einem Punkt berühren kann und gehört dieser Grenzfall eigentlich nicht in unsere Betrachtung. Es sind jedoch für den Werth $\xi = -r$ zwei Grenzfälle zu unterscheiden, der eine, der dadurch entsteht, dass der Punkt (ξ, η) von der positiven Richtung her nach dem Berührungspunkte B rückt, der zweite, wenn der Punkt (ξ, η) aus dem Negativen sich dem Berührungspunkte nähert. Aus Gl. (2α) erhält man nämlich für $\xi = -r$:

$$2rx^2 + 4r^2x + 2r^3 = 0$$

oder $(x + r)^2 = 0$, d. h. der Kegelschnitt hat sich in eine doppelte Gerade aufgelöst, welche im Abstand $x = -r$ parallel zur Axe der y verläuft.

Während im Allgemeinen eine doppelte Gerade als der Grenzfall einer Parabel, hervorgegangen aus 2 parallelen Geraden, anzusehen ist, so hat man hier dieselbe als den Grenzfall einer Hyperbel aufzufassen, da alle vorhergehenden grösseren negativen Werthe wie $\xi = -r$ nur Hyperbeln liefern. Die zusammenfallenden Geraden sind daher als 2 unter einem unendlich kleinen Winkel sich schneidende Geraden zu betrachten.

Ihr Schnittpunkt ist zugleich der Mittelpunkt und der Berührungspunkt des in 2 gerade Linien aufgelösten Kegelschnitts, da ja bei dieser Untersuchung die Mittelpunkte aller Kegelschnitte auf der Axe der x liegen müssen.

3) Es sei $\xi = r$, so ist

$$a = r,\ b = r,$$

d. h. die Ellipse ist in den gegebenen Kreis übergegangen.

4) $\xi = 2r$ ergibt:

$a = \frac{3}{2} r$, und $b = r \sqrt{\frac{3}{2}}$; es ist also $b < a$ und gehört dem Axensystem einer Ellipse an.

5) $\xi = \infty$ erfordert auch $a = \infty$, d. h. die Ellipse ist in eine Parabel übergegangen.

Für Werthe des $\xi > r$ erhalten wir daher Ellipsen mit immer grösseren Axen, bis für den Werth $\xi = \infty$ die Parabel zum Vorschein kommt.

6) Alle grösseren negativen Werthe wie $\xi = -r$ liefern, wie oben erwähnt, Hyperbeln, die dann wieder für $\xi = -\infty$ in die Parabel übergehen.

Aus diesen Betrachtungen hat sich ergeben, dass, wenn wir von dem gegebenen Kreis selbst ausgehen, auf der einen Seite eine Schaar von Ellipsen erscheint, die mit einer Parabel abschliesst, um durch diese in Hyperbeln überzugehen, die von der andern Seite sich dem Kreis in der Weise nähern, dass ihr Abschluss eine doppelte Gerade bildet. An diese Gerade schliesst sich eine auf einen Punkt reducirte Ellipse an, von der aus die innerhalb des Kreises liegenden Ellipsen wachsen, bis sie schliesslich wieder in den gegebenen Kreis selbst übergehen.

Nach dieser einleitenden Betrachtung untersuchen wir weiter diejenigen Kegelschnitte, welche den Kreis in einem beliebigen Punkte berühren und durch einen festen Punkt (ξ, η) gehen. Wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, ist die allgemeine Kegelschnittsgleichung, welche einen gegebenen Kreis 4punktig berührt und durch einen Punkt (ξ, η) geht:

(3) .... $(x^2+y^2-r^2)(\xi x_1+\eta y_1-r^2)^2-(xx_1+yy_1-r^2)^2(\xi^2+\eta^2-r^2)=0.$

Da in diesem Capitel der Berührungspunkt $B'(x_1 y_1)$ variabel ist, so führen wir mit Vortheil für denselben Polarcoordinaten ein und setzen:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ y_1 = r\sin\varphi.$$

Es wird dann aus Gl. (3), da wir, wie oben bemerkt, den Punkt (ξ, η) unbeschadet der Allgemeinheit auf der Axe der x annehmen können:

(4) .... $(x^2+y^2-r^2)(\xi r\cos\varphi - r^2)^2 - (xr\cos\varphi + yr\sin\varphi - r^2)^2(\xi^2-r^2) = 0.$

Ertheilen wir jetzt dem $\sphericalangle\varphi$ die Werthe von 0^0 bis 360^0, so wird für jeden Werth von φ ein Kegelschnitt existiren, der den geforderten Bedingungen entspricht. Wir wollen nun für spezielle Lagen des Berührungspunktes die Art der auftretenden Kegelschnitte kennen lernen. So ist für

1) $\sphericalangle\varphi = 0$ Gl. (4):

$$(x^2+y^2-r^2)(r\xi - r^2)^2 - (rx - r^2)^2(\xi^2 - r^2) = 0 \text{ oder}$$
$$2rx^2 - y^2(\xi - r) - 2rx(\xi + r) + 2r^2\xi = 0$$

die Gleichung einer Hyperbel, deren Durchschnittspunkte mit der Axe der x:

$$x_1 = \xi\ x_2 = r \text{ sich aus der Gleichung}$$
$$x^2 - x(\xi + r) + r\xi = 0 \text{ ergeben.}$$

2) Für $\varphi = 90^0$ erhält man aus Gleichung (4):

$$(x^2+y^2-r^2)(-r^2)^2 - (ry - r^2)^2(\xi^2 - r^2) = 0 \text{ oder}$$
$$-r^2x^2 + y^2(\xi^2 - 2r^2) - 2ry(\xi^2 - r^2) - r^2\xi^2 = 0$$

ebenfalls die Gleichung einer Hyperbel mit den Durchschnittspunkten auf der Axe der x:

$$x_1 = +\xi,\ x_2 = -\xi, \text{ auf der Axe der } y:$$
$$y_1 = \frac{r\xi^2}{\xi^2 - 2r^2},\ y_2 = r.$$

3) Es sei $\varphi = 180^0$, so erhalten wir die Gleichung:

$$2rx^2 + y^2(\xi + r) - 2rx(\xi - r) - 2r\xi = 0,$$

die Gleichung einer Ellipse mit den Durchschnittspunkten auf der Abscissenaxe: $x_1 = -r$, $x_2 = \xi$.

4) Für $\sphericalangle\varphi = 270^0$ findet man

$$(x^2+y^2-r^2)r^2 - (y + r)^2(\xi^2 - r^2) = 0$$

und geordnet:

$$-r x^2 + y^2(\xi^2 - 2r^2) + 2ry(\xi^2 - r^2) - r^2\xi^2 = 0$$

eine Gleichung, die wieder einer Hyperbel angehört. Für $y = 0$ hat man $x_1 = +\xi$, $x_2 = -\xi$; für $x = 0$ ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der Ordinatenaxe:

$$y_1 = \frac{-r\xi^2}{\xi^2 - 2r^2}, \quad y_2 = -r.$$

5) Für $\varphi = 360^0$ endlich erhält man wiederum die Hyperbel, die schon unter 1) angeführt ist.

So ist denn die Gl. (4), um noch einmal einen Ueberblick zu bekommen, für

$\sphericalangle \varphi = 0^0$ übergegangen in eine Hyperbel,
$\varphi = 90^0$ » » » Hyperbel,
$\varphi = 180^0$ » » » Ellipse,
$\varphi = 270^0$ » » » Hyperbel,
$\varphi = 360^0$ » » » Hyperbel.

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass während der Werthe $\varphi = 90^0$ und $\varphi = 180^0$ die Hyberbel in eine Ellipse übergegangen, und dass innerhalb der Werthe $\varphi = 180^0$ und 270^0 das Umgekehrte stattgefunden hat, nämlich dass die Ellipse sich wiederum in eine Hyperbel umgewandelt hat. Da ein directer Uebergang der Hyperbel in die Ellipse nicht möglich ist, sondern immer erst die Hyperbel in die Parabel und dann in die Ellipse degenerirt, so müssen nothwendigerweise zwischen den Werthen 90^0 und 180^0, ferner 180^0 und 270^0 sich Werthe für φ finden, welche die Gl. (4) in eine Parabel übergehen lassen.

Um diese Werthe für φ zu bestimmen, stellen wir zuvörderst die Gleichung einer Ellipse auf, die den Kreis in einem beliebigen Punkte B' (Fig. 2) 4 punktig berührt und durch Punkt (ξ, η) geht. Es sei der zugehörige Centriwinkel, um welchen sich der Berührungspunkt auf der Peripherie des Kreises fortbewegt hat, mit φ bezeichnet.

Legen wir nun durch den Berührungspunkt B' als Anfangspunkt ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, das als Axe

der x die Gerade $B'OX'$, als Ordinatenaxe die Gerade $B'Y'$ besitzt und gegen das alte Coordinatensystem um $\sphericalangle \varphi$ geneigt ist, so sind alle die in Betracht kommenden Kegelschnitte, welche im Punkte B' den Kreis 4punktig berühren, auf ihren Scheitel bezogen.

Demnach lautet die Gleichung der Ellipse, welche wir hier aufstellen wollen, wenn wir zugleich berücksichtigen, dass ihr Axenverhältniss, wie zu Anfang der Betrachtung nachgewiesen $\frac{b^2}{a} = r$ sein muss:

$$(\alpha) \ldots\ldots y^2 = 2rx - \frac{r}{a}x^2.$$

Der Punkt (ξ, η) hat nun gegen das neue Coordinatensystem die Coordinaten:

$$\xi' = \xi \cos\varphi + r, \quad \eta' = -\xi \sin\varphi$$

und damit die Ellipse durch diesen Punkt gehe, müssen seine Coordinaten der Gl. (α) Genüge leisten.

Demnach hat man:

$$a\xi^2 \sin^2\varphi = 2r(\xi\cos\varphi + r) - \frac{r}{a}(\xi\cos\varphi + r)^2$$

und daraus:

$$a = \frac{r(\xi\cos\varphi + r)^2}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi}$$

als grosse Halbaxe der gesuchten Ellipse.

Setzen wir jetzt den Nenner von a:

$$2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi \text{ gleich Null,}$$

so wird die Halbaxe a unendlich gross, und kann daher der Werth von a nur einer Parabel angehören.

Da in dieser Untersuchung die Axenrichtung aller Kegelschnitte zusammenfällt mit der Richtung der Verbindungslinie des Berührungspunktes und des Kreismittelpunktes, so brauchen wir hier nur die Richtung dieser letztern zu bestimmen, um auch die Axenrichtung der Parabel zu erhalten. Dies geschieht aus der Bedingungsgleichung:

$$2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi = 0;$$

dieselbe ist für φ vom 2. Grad und liefert daher 2 Werthe von φ, mithin auch die Axenrichtung zweier Parabeln.

Aus dieser Gleichung ergibt sich nämlich, wenn wir $\cos\varphi = c$ setzen:

$$\xi^2 - \xi^2 c^2 - 2r\xi c - 2r^2 = 0 \text{ oder}$$
$$(\xi c + r)^2 = \xi^2 - r^2, \text{ daher}$$
$$c = \frac{-r \pm \sqrt{\xi^2 - r^2}}{\xi}.$$

Von diesem Werthsystem ist jedoch nur der Werth

$$\cos\varphi = \frac{-r + \sqrt{\xi^2 - r^2}}{\xi}$$

zu gebrauchen, da $(-r - \sqrt{\xi^2 - r^2}) > \xi$, mithin der Quotient $\frac{-r - \sqrt{\xi^2 - r^2}}{\xi}$ keinen ächten Bruch vorstellt.

Da aber vermöge der Relation $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ der Werth von $\cos\varphi = \frac{-r + \sqrt{\xi^2 - r^2}}{\xi}$ nicht eindeutig bestimmt ist, so erhält man noch den 2. Werth:

$$\cos(360^0 - \varphi) = \frac{-r - \sqrt{\xi^2 - r^2}}{\xi}.$$

Für ξ kleiner als r, womit der Punkt (ξ, η) innerhalb des Kreises gerückt ist, wird $\cos\varphi$ imaginär, d. h. es gibt dann keine Parabeln, welche den geforderten Bedingungen Folge leisten.

Wird $\xi = r$, so hat man $\varphi = 180^0$, d. h. der Berührungspunkt ist mit dem Punkt (ξ, η) zusammengefallen.

Wird $\xi > r$, so erhalten wir stets reelle Werthe für $\sphericalangle\varphi$ und somit auch für jeden Werth von ξ je zwei Parabeln.

Mit der Gleichung

$$a = \frac{r(\xi\cos\varphi + r)^2}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2 \sin^2\varphi}$$

sind uns die Halbaxen aller Kegelschnitte gegeben, die im Punkte B' 4punktig berühren und durch einen Punkt (ξ, η)

gehen, der auf dem von 0 aus mit dem Radius ξ beschriebenen Kreise liegt. Mit der Lage des Punktes (ξ, η) ändert sich natürlich die Grösse des Winkels φ.

Fassen wir nun einen dieser Kegelschnitte ins Auge, nämlich die Ellipse, die durch den Punkt $P_1(\xi, \eta)$ (Fig. 3) hindurch geht und drehen jetzt das ganze System um den $\sphericalangle \varphi$ zurück, dann wird der Berührungspunkt B' nach B'_1, der Mittelpunkt M nach M' und der Punkt P_1 nach P rücken. Ebenso werden die Kegelschnitte, die durch die Punkte P_2, P_3 . . . . gehen und in B' 4punktig berühren, durch Zurückdrehen von φ in neue Lagen übergehen und zwar so, dass die Punkte P_2, P_3 ... P_n im Punkte P zusammenfallen, während sich die zugehörigen Berührungspunkte auf der Peripherie des Kreises vertheilen.

Um die Mittelpunktscurve dieser letzteren Kegelschnitte, welche also alle durch Punkt P gehen und den Kreis in einem beliebigen Punkte berühren, aufzustellen, bilden wir die Mittelpunktscoordinaten eines dieser Kegelschnitte, woraus durch Elimination von φ die Mittelpunktscurve aller resultirt. Verlegen wir der Einfachheit halber das Coordinatensystem von B' nach O, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes M', wie aus der Figur sofort erhellt:

$$O M' \cos\varphi = x$$

$$O M' \sin\varphi = y, \text{ oder da } O M' = a - r \text{ ist:}$$

$$(\beta) \ldots\ldots (a-r)\cos\varphi = x, \quad (a-r)\sin\varphi = y.$$

Nun ist $(a-r) = \dfrac{r(\xi\cos\varphi + r)^2}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi} - r$

$$\text{oder} = \frac{r(\xi^2 - r^2)}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi}.$$

Diesen Werth in Gl. (β) eingesetzt ergibt:

$$\frac{r(\xi^2 - r^2)\cos\varphi}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi} = x; \quad \frac{r(\xi^2 - r^2)\sin\varphi}{2r(\xi\cos\varphi + r) - \xi^2\sin^2\varphi} = y$$

und indem wir für $\cos\varphi$ c einführen:

$$(\gamma) \ldots\ldots \frac{r(\xi^2 - r^2)c}{2r(\xi c + r) - \xi^2(1-c^2)} x = ; \quad \frac{r(\xi^2 - r^2)\sqrt{1-c^2}}{2r(\xi c + r) - \xi^2(1-c^2)} = y.$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man:

$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{x}{y}$ oder $y^2c^2 = x^2 - x^2c^2$, daher $c = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Mit der Einführung dieses Werthes in eine der Gl. *(γ)* ist die Elimination des $\sphericalangle \varphi$ erreicht und man hat dann:

$$\frac{r(\xi^2 - r^2)\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2r\left(\xi\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + r\right) - \xi^2\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)} = 1$$

oder $\sqrt{x^2+x^2}\left[r(\xi^2 - r^2) - 2rx\xi\right] = 2r^2(x^2+y^2) - \xi^2 y^2$

als die gesuchte Gleichung der Mittelpunktscurve. Diese Gleichung ist für x und y vom 4. Grad. Der Kürze wegen führen wir Polarcoordinaten ein und setzen $x = a\cos\vartheta$, $y = a\sin\vartheta$. Damit wird aus obiger Gleichung:

$$\frac{r(\xi^2 - r^2)}{2ra(\xi\cos\vartheta + r) - a\xi^2 + a\cos^2\vartheta\,\xi^2} = 1 \text{ oder}$$

$$(\delta) \ldots a\xi^2\cos^2\vartheta + 2ra\xi\cos\vartheta - a(\xi^2 - 2r^2) - r(\xi^2 - r^2) = 0.$$

Um einigermassen ein Bild dieser Curve zu erhalten, rechnet man aus Gl. *(δ)* den Radiusvector a aus und ertheilt dann $\sphericalangle \vartheta$ verschiedene Werthe. Es ist

$$a = \frac{r(\xi^2 - r^2)}{\xi^2\cos^2\vartheta + 2r\xi\cos\vartheta - (\xi^2 - 2r^2)}.$$

Für $\vartheta = 0^0$ hat man $a = {}^1/_2(\xi - r)$.

Für $\vartheta = 60^0$ erreicht die Curve ein Maximum; es wird

$$a = \frac{r(\xi^2 - r^2)}{2r^2 + r\xi - {}^3/_4\,\xi^2}.$$

$\vartheta = 120^0$ liefert:

$$a = \frac{r(\xi^2 - r^2)}{2r^2 - r\xi - {}^3/_4\,\xi^2}.$$

$\vartheta = 90^0$ und 270^0 ergibt:

$$a = \frac{r(\xi^2 - r)}{2r^2 - \xi^2}.$$

Für $\vartheta = 180^0$ wird $a = -\frac{1}{2}(\xi + r)$.

Daraus ergibt sich, dass der Radiusvector zunimmt für $\vartheta = 0^0$ bis $\vartheta = 60^0$, dann abnimmt bis $\vartheta = 120^0$, alsdann wieder wächst bis $\vartheta = 180^0$.

Genau dasselbe findet auf der andern Seite der Abscissenaxe statt, so dass die Curve symmetrisch zu beiden Seiten der x-Axe liegt.

Eine andere Bedingung, welche den einen Kreis 4punktig berührenden Kegelschnitten auferlegt werden kann, ohne dass die Rechnungen allzu complicirter Art werden, ist diejenige, dass die Kegelschnitte ausserdem eine Gerade berühren sollen. Auch hier ist es uns gestattet, ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beeinträchtigen, der Geraden eine spezielle Lage anzuweisen und zwar dieselbe parallel der Ordinatenaxe anzunehmen.

Die Untersuchung der überhaupt möglichen Kegelschnitte, welche einen Kreis in einem Punkte B 4punktig berühren und ausserdem obiger Bedingung unterworfen sind, ist ganz analog der im ersten Theil der Betrachtung durchgeführten Aufgabe und liefert dieselben Resultate, wenn wir für ξ die Entfernung e der Geraden vom Mittelpunkt des Kreises einführen.

Es leuchtet dies sofort deshalb ein, weil der Berührungspunkt auf der Geraden zusammenfällt mit dem Schnittpunkt der Geraden und der Abscissenaxe und daher der Berührungspunkt sich, wie im ersten Abschnitt der Punkt (ξ, η) auf der Axe der x bewegt.

Wir wenden uns daher sofort zu der 2. Untersuchung, in welcher der Berührungspunkt variabel auf dem Kreise und die zur Ordinatenaxe parallele Gerade eine feste Lage einnimmt.

Die Gleichung des Kegelschnitts, welcher in einem beliebigen Punkte den Kreis 4punktig berührt, lautet nach früherem:

(1) $(x^2 + y^2 - r^2) - k(x r \cos\varphi + y r \sin\varphi - r^2)^2 = 0.$

Da es zu weitläufig würde die Bedingung allgemein auszudrücken, unter welcher dieser Kegelschnitt die Gerade $x = e$ berührt, beginnen wir mit speziellen Fällen, indem wir

für bestimmte Lagen die Bedingung der Berührung aufsuchen, aus welcher sich dann k bestimmen lässt. Setzen wir

1) $\varphi = 0$, so wird aus Gl. (1)

$$(\alpha) \ldots . \quad x^2 + y^2 - r^2 - k(xr - r^2)^2 = 0.$$

Damit dieser Kegelschnitt die Gerade $x = e$ berührt, suchen wir zuförderst die Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt und lassen alsdann die beiden Schnittpunkte dadurch in einen zusammenfallen, das wir den Radicand der auftretenden Wurzelgrösse $= 0$ setzen. Aus dieser Bedingungsgleichung berechnet sich k, welches in Gl. (α) eingesetzt den gesuchten Kegelschnitt ergibt.

Demgemäss hat man, wenn wir die Gleichung der Geraden $x = e$ mit Gl. (α) verbinden:

$$e^2 + y^2 - r^2 - k(er - r^2)^2 = 0,$$

woraus

$$y = \pm\sqrt{k(er - r^2)^2 - (e^2 - r^2)};$$

und indem wir den Radicand $= 0$ setzen, erhält man:

$$k = \frac{e^2 - r^2}{r^2(e - r)^2} = \frac{e + r}{r^2(e - r)}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gl. (α), so ergibt sich:

$$-2rx^2 + y^2(e - r) + 2rx(e + r) - 2r^2 e = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Hyperbel dar, da $B^2 - AA'$ eine positive Grösse ist. Für $y = 0$ hat man:

$$x^2 - x(e + r) + re^2 = 0$$

$$x = \frac{e + r}{2} \pm \frac{\sqrt{(e + r)^2 - 4re}}{2},$$

woraus als Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe sich $x_1 = e$, $x_2 = r$ ergeben.

2) Für $\varphi = 90^0$ erhalten wir, wenn wir zugleich die Gleichung der Geraden mit Gleichung (1) verbinden:

$$e^2 + y^2 - r^2 - kr^2(y - r)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$y^2(1 - kr^2) + 2r^3 ky - r^2(1 + kr^2) + e^2 = 0$$

$$y = -2r^3 k \pm \sqrt{4r^6 k^2 + 4[r^2(1 + kr^2) - e^2](1 - kr^2)}.$$

Der Radicand $=0$ gesetzt ergibt:

$$4r^6k^2+4r^2(1+kr^2)-4e^2-4kr^4(1+kr^2)+4kr^2e^2=0,$$

woraus $k=\frac{e^2-r^2}{r^2e^2}$. Dann wird aus obiger Gleichung:

$$x^2+y^2-r^2-\frac{e^2-r^2}{r^2e^2}(yr-r^2)^2=0$$

oder entwickelt:

$$e^2x^2+r^2y^2+2ry(e^2-r^2)-r^2(2e^2-r^2)=0$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Durchschnittspunkte mit der Ordinatenaxe sich aus der Gleichung:

$$r^2y^2+2ry(e^2-r^2)-r^2(2e^2-r^2)=0$$

ergeben. Sie sind $y_1=r$, $y_2=\frac{r-2e^2}{r}$.

3) Es sei $\varphi=180^0$, so wird aus Gl. (1) in Verbindung mit der Geraden $x=e$: $e^2+y^2-r^2-k(-er-r^2)^2=0$ und

$$y=\sqrt{kr^2(e+r)^2-(e^2-r^2)}.$$

Aus der Gl. $kr^2(e+r)^2-(e^2-r^2)=0$ erhält man

$$k=\frac{e-r}{r^2(e+r)}.$$

Daher wird die gesuchte Kegelschnittsgleichung:

$$x^2+y^2-r^2-\frac{(e-r)}{(e+r)}\cdot(x+r)^2=0$$

oder geordnet $2rx^2+y^2(e+r)-2r(e-r)x-2er^2=0$ wiederum die Gleichung einer Ellipse mit den Schnittpunkten auf der Abscissenaxe $x_1=-r$, $x_2=e$.

4) Für $\varphi=270^0$ endlich wird Gl. (1) in

$$x^2+y^2-r^2-k(-ry-r^2)^2=0$$

umgewandelt. Da k wie unter (2) $=\frac{e^2-r^2}{e^2r^2}$ wird, so erhält man als gesuchte Kegelschnittsgleichung

$$(x^2+y^2-r^2)e^2-(e^2-r^2)(y+r)^2=0$$

oder ausgeführt:

$$e^2x^2+r^2y^2-2ry(e^2-r^2)-r^2(2e^2-r^2)=0$$

ebenfalls eine Ellipse. Ihre Durchschnitte mit der Axe der y sind

$$y_1 = -r,\ y_2 = \frac{2e^2 - r}{r}.$$

So ist Gl. (1), um die Resultate noch einmal übersehen zu können:

für $\varphi = 0^0$ übergegangen in eine Hyperbel,
» $\varphi = 90^0$ » » » Ellipse,
» $\varphi = 180^0$ » » » Ellipse,
» $\varphi = 270^0$ » » » Ellipse,
» $\varphi = 360^0$ » » » Hyperbel.

Da ein Uebergang der Hyperbel in die Ellipse zwischen den Werthen 0^0 und 90^0 und umgekehrt der Ellipse in die Hyperbel zwischen 270^0 und 360^0 stattfindet, so haben wir auch hier 2 Parabeln zu erwarten, deren Lage wir im Folgenden noch näher bestimmen wollen.

Zu dem Ende benutzen wir wiederum die Scheitelgleichung einer Ellipse, die den Kreis in einem beliebigen Punkte 4 punktig berührt. Dieselbe ist wie früher auf ein neues Coordinatensystem bezogen, das gegen das alte um $\sphericalangle \varphi$ geneigt ist.

Sie lautet:

$$(2) \ldots\ldots y^2 = 2rx - \frac{r}{a}x^2.$$

Um die Gleichung der Geraden, ebenfalls auf das neue Coordinatensystem, zu beziehen, bestimmen wir ihre Abschnitte auf den Axen.

Es ist der Abschnitt derselben auf der Axe der x (Fig. 4):

$$O'N = OO' + ON = \frac{e}{\cos\varphi} + r,$$

auf der Axe der y:

$$O'M = O'P + PM = \frac{e}{\sin\varphi} + \frac{r}{tang\,\varphi}.$$

Setzen wir diese Werthe als a und b in die bekannte Gleichungsform $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, so hat man:

$$\frac{x\cos\varphi}{e+r\cos\varphi}+\frac{y}{\frac{e\sin\varphi+r\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}=1 \text{ oder}$$

$$(3)\ \ldots\ldots\ x\cos\varphi+y\sin\varphi=e+r\cos\varphi$$

als gesuchte Gleichung der Geraden.

Um die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Ellipse zu finden, combiniren wir Gl. (2) und (3).

Man erhält, wenn man den Werth von y aus Gl. (3) in (2) substituirt:

$$\frac{(e+r\cos\varphi-x\cos\varphi)^2}{\sin^2\varphi}=2rx-\frac{r}{a}x^2 \text{ oder}$$

$$x^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\frac{r}{a}\right)-x\left[2(e+r\cos\varphi)\cos\varphi+2r\sin^2\varphi\right]+(e+r\cos\varphi)^2=0.$$

Dann wird

$$x=\left[2(e+r\cos\varphi)\cos\varphi+2r\sin^2\varphi\right]:2\left(\cos^2\varphi+\frac{r}{a}\sin^2\varphi\right)$$

$$\pm\sqrt{\left[2(e+r\cos\varphi)\cos\varphi+2r\sin^2\varphi\right]^2-4(e+r\cos\varphi)^2\left(\cos^2\varphi+\frac{r}{a}\sin^2\varphi\right)}:$$

$$:2\left(\cos^2\varphi+\frac{r}{a}\sin^2\varphi\right).$$

Sollen die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, d. h. soll die Ellipse die Gerade berühren, so muss der Wurzelausdruck verschwinden, es muss deshalb

$$\left[2(e+r\cos\varphi)\cos\varphi+2r\sin^2\varphi\right]^2-4(e+r\cos\varphi^2)\left(\cos^2\varphi+\frac{r}{a}\sin^2\varphi\right)=0.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung ergibt sich nach gehöriger Reduction die grosse Halbaxe der Ellipse:

$$a=\frac{(e+r\cos\varphi)^2}{r(1+\cos^2\varphi)+2e\cos\varphi}.$$

Setzt man jetzt den Nenner von $a=o$, so wird letzteres unendlich gross und kann daher nur die Axe einer Parabel

repräsentiren. Die Axenrichtung der hier auftretenden Parabeln bestimmt sich wieder aus der Bedingungsgleichung:

$$r(1 + \cos^2\varphi) + 2e\cos\varphi = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - r^2}}{r},$$

wovon nur

$$\cos\varphi = -\frac{e + \sqrt{e^2 - r^2}}{r}$$

zu gebrauchen ist. Da jedoch $\cos\varphi = \cos(360^0 - \varphi)$, so erhält man noch den 2. Werth:

$$\cos(360^0 - \varphi) = -\frac{e + \sqrt{e^2 - r^2}}{r}.$$

Damit hat sich denn gezeigt, dass auch in dieser Untersuchung 2 Parabeln existiren, die den geforderten Eigenschaften Genüge leisten und deren Axenrichtungen und Berührungspunkte sich aus obigen Relationen ergeben.

Analog den Betrachtungen im 1. Abschnitt können wir auch hier die Mittelpunktscurve aller Kegelschnitte aufstellen, die den Kreis 4punktig und die Grade 2punktig berühren, indem wir aus den Mittelpunktscoordinaten einer dieser Kegelschnitte den Winkel φ eliminiren. Verschieben wir wiederum das Coordinatensystem parallel mit sich selbst um r, so sind die Mittelpunktscoordinaten: $(a - r)\cos\varphi = x$, $(a - r)\sin\varphi = y$. Durch Division erhält man $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi$ und hieraus

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Durch Substitution in die erste der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(a - r)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

und nach Einführung des oben gefundenen Werthes für a:

$$\frac{(e^2 - r^2)\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{r\left(1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)+2e\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = 1$$

als die gesuchte Mittelpunktscurve.

Um die Gleichung zu vereinfachen, führen wir Polarcoordinaten ein und setzen: $x = a\cos\vartheta$, $y = a\sin\vartheta$. Dann wird aus obiger Gleichung:

$$r\,a\cos^2\vartheta + 2\,e\,a\cos\vartheta + r\,a - (e^2 - r^2) = 0.$$

Dieselbe stellt eine Curve der 4. Ordnung vor, welche wir hier nicht weiter discutiren wollen. Ihre Durchschnittspunkte mit der Polaraxe sind $a = \frac{e-r}{2}$ und $a = -\frac{e+r}{2}$.

An die Betrachtung der Schaar von Kegelschnitten, welche einen Kreis 4punktig berühren und durch einen Punkt gehen oder eine Gerade berühren, knüpft sich die gewiss nicht uninteressante Frage, ob es auch Kegelschnitte obiger Art gebe, die durch zwei Punkte hindurch gehen oder zwei Gerade berühren.

Um die erste Frage zu beantworten, nämlich um zu erfahren, wie viel Kegelschnitte einen Kreis 4punktig berühren und durch zwei Punkte gehen können, legen wir der allgemeinen Kegelschnittsgleichung

(1) . . . . . $(x^2 + y^2 - r^2) - \lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha - r)^2 = 0$

die zwei Bedingungen auf, den Coordinaten der Punkte $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ Genüge zu leisten.

Aus der ersten der beiden Bedingungen bestimmt sich:

$$\lambda = \frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - r)^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gl. (1) und berücksichtigt ferner, dass diese Gleichung auch durch den Punkt $x_2\,y_2$ gehen soll, so erhält man als Bedingungsgleichung:

$$(x_2^2 + y_2^2 - r^2) - \frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - r)^2} \times (x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha - r)^2 = 0$$

oder:

$$\frac{x_2^2 + y_2^2 - r^2}{x_1^2 + y_1^2 - r^2} = \frac{(x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha - r)^2}{(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - r)^2}.$$

$$(x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha - r)\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2} = (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - r)\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}$$

Ordnet man noch $\cos\alpha$, so erhält man:

$$\cos\alpha\left[x_2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2} - x_1\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}\right] - r\left[\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2} -\right.$$

$$\left. - \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}\right] = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\left[y_2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2} - y_1\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}\right]$$

oder in allgemeinen Zeichen:

$$\cos\alpha\, M - K = \pm\sqrt{1 - \cos\alpha}\, N.$$

Diese Gleichung liefert für $\cos\alpha$ 4 Werthe; daher wird es im Allgemeinen 4 Berührungspunkte geben, in welchen die Kegelschnitte, die durch die beiden Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ gehen, den Kreis 4 punktig berühren.

Analytisch ergeben sich aus obiger Gleichung für $\cos\varphi$ keine derart einfachen Ausdrücke, dass dieselben zu einer Construction brauchbar wären.

Auf eine leichte interessante Construction weist uns Chasles in seinem Traité des Sections Coniques Capitel 497 III. hin, welche wir hier in Kürze noch anführen wollen.

»Die gegebenen Punkte a und b liegen auf einer Geraden, welche den Kreis in 2 Punkten a', b' schneidet. Construirt man die beiden Punkte q und q_1, welche die beiden Strecken ab und $a'b'$ harmonisch theilen, und zieht von q und q_1 je 2 Tangenten an den Kreis, so sind die Berührungspunkte der Tangenten zugleich die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte.«

Da zu der Construction der beiden Punkte q und q_1 ein Hülfskreis nöthig ist, so gestaltet sich in diesem Falle die Construction der Berührungspunkte deshalb sehr einfach, weil wir den gegebenen Kreis als Hülfskreis benutzen können.

Kegelschnitte, welche einen Kreis 4 punktig und ausserdem 2 Gerade berühren, gibt es ebenfalls 4, wie aus der uns von Chasles gegebenen Construction 497 IV. erhellt. Man sucht

zu den Geraden A und B die beiden Strahlen q und q_1, welche zu ersteren harmonisch liegen. Die Punkte, in welchen die Gerade q und q_1 den Kreis treffen, sind die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte. Es würde den Zweck der Arbeit übersteigen, wenn wir auf den Beweis dieser Construction eingehen wollten; wir begnügen uns daher uns auf den von Chasles (461, 308, 370, 103) gegebenen Nachweis zu berufen.

II. Dreipunktige Berührung eines Kreises mit Kegelschnitten.

Wie in der Einleitung erläutert, hat ein Kegelschnitt, der einen Kreis 3punktig berührt und durch einen Punkt der Kreisperipherie geht, die Form:

$$K - \lambda T G = 0,$$

wo λ eine noch willkürlich zu bestimmende Grösse, T die Tangente an den Kreis K in beliebigem Punkte und G eine Gerade, die durch den Berührungspunkt und die Kreisperipherie hindurch geht, bedeutet.

Nehmen wir, um die Betrachtung zu vereinfachen, den Berührungspunkt als Anfangspunkt der Coordinaten, die Tangente T als die Axe der y an; so lautet die Gleichung obigen Kegelschnitts:

$$(1\alpha) \ldots\ldots (x^2 + y^2 - 2rx) - \lambda x(x - ly) = 0 \text{ oder}$$
$$(1\beta) \ldots\ldots [x^2(1-\lambda) + y^2 - 2rx] + \lambda l x y = 0.$$

Da die Gleichung (1β) ebenfalls von der Form $S - \lambda TG = 0$ ist, wo hier T die Ordinatenaxe, G die Axe der x bedeutet, so schneidet der Kegelschnitt (1β) die Abscissenaxe in einem gewissen Punkte, dessen Abscisse für $y = o : x' = \frac{2r}{1-\lambda}$ wird. Da sich in der Gleichung (1β) 2 beliebige Grössen, λ und l, befinden, so bieten sich uns zuförderst zwei Aufgaben dar.

Betrachten wir zuerst l als constant, λ als variabel, so wird Gl. (1β), da durch $l = tang\ \gamma$ eine bestimmte Richtung charakterisirt wird, die im Punkt L (Fig. 5) die Kreisperipherie

schneidet, die Schaar aller Kegelschnitte repräsentiren, die im Punkte O den Kreis 3 punktig berühren und durch Punkt L der Kreisperipherie gehen.

Mit veränderlichem λ wird dann auch der Schnittpunkt der Kegelschnitte mit der Axe der x sich stets ändern.

Wird anderseits λ als constant, l als variabel aufgefasst, so wird der Schnittpunkt der Kegelschnitte mit der Abscissenaxe ein ganz bestimmter, während die Kreisperipherie, da l variabel, in beliebigen Punkten geschnitten wird. Daher wird bei dieser Annahme die Gleichung (1β) die Schaar aller Kegelschnitte enthalten, die in O den Kreis 3 punktig berühren und durch einen festen Punkt der Abscissenaxe gehen, jedoch die Kreisperipherie beliebig schneiden.

Wie schon angedeutet, ist bei variablen λ und constanten l in der Gleichung (1β) .... $x^2(1-\lambda)+y^2-2rx+\lambda lxy=0$ die Schaar aller Kegelschnitte enthalten, die in O 3 punktig berühren und durch einen Punkt L der Kreisperipherie gehen.

Die Gleichungen aller dieser Kegelschnitte erhält man, wenn wir λ alle möglichen Werthe durchlaufen lassen nnd in Gl. (1β) substituiren. Es dürfte nun von Interesse sein, die Mittelpunktscurve dieser Schaar von Kegelschnitten aufzustellen. Zu dem Ende bilden wir die Mittelpunktscoordinaten der Gleichung: $x^2(1-\lambda)+y^2-2rx+\lambda lxy=0$ nach der Formel:

$$\xi=\frac{be-cd}{ac-b^2};\ \eta=\frac{bd-ae}{ac-b^2}.$$

Da $a=1-\lambda;\ c=1\ e=0$

$$b=\frac{l\lambda}{2};\ d=-r\ f=0 \text{ ist, so erhält man}$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ \xi=\frac{4r}{4(1-\lambda)-l^2\lambda^2};\ \eta=-\frac{2rl\lambda}{4(1-\lambda)-l^2\lambda^2}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\eta}{\xi}=-\frac{\lambda l}{2} \text{ oder } \lambda=-\frac{2\eta}{\xi l}.$$

Setzen wir diesen Werth für λ in eine der beiden Gleichungen (2) ein, so ist λ eliminirt und wir erhalten die Gleichung der gesuchten Mittelpunktscurve:

$$\xi = \frac{r}{1 + \frac{2\eta}{\xi l} - \frac{\eta^2}{\xi^2}} \quad \text{oder}$$

$$(3) \ldots\ldots \xi^2 l + 2\eta\xi - l\eta^2 - rl\xi = 0.$$

Diese Gleichung ist die einer Hyperbel, da $B^2 - AA' = 1 + l^2$ eine positive Grösse für alle Werthe von l vorstellt.

Die Hyberbel geht durch den Coordinatenanfang.

Um zu erfahren, ob unter der Kegelschnittschaar, welche für jeden Werth von l auftritt, sich auch Parabeln befinden, stellen wir die Bedingung auf, welche Gl. (1β) in eine Parabel übergehen lässt. Geben wir der Gl. (1β) die Form:

$$(1\gamma) \ldots\ldots x^2 + y^2 - 2rx - \lambda x(x\cos\alpha + y\cos\beta) = 0$$

wo $l = -tang\,\alpha$ und α den von der auf der Geraden G errichteten Senkrechten und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel bedeutet, so muss bekanntlich, damit die Gleichung eine Parabel werde, die Bedingung $B^2 - AA' = 0$ erfüllt sein.

Ordnet man Gl. (1γ) nach Potenzen von x und y, so erhält man:

$$x^2(1 - \lambda\cos\alpha) + y^2 - 2rx - \lambda xy\sin\alpha = 0$$

und als Bedingung:

$$\lambda^2\sin^2\alpha + 4\lambda\cos\alpha - 4 = 0,$$

woraus

$$\lambda = -2\frac{(\cos\alpha \mp 1)}{\sin^2\alpha}$$

sich ergibt. Führen wir diesen Werth in Gl. (1γ) ein, so resultirt als gesuchte Parabelgleichung:

$$\left[\frac{x \,.\, \cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha} + y\right]^2 - 2rx = 0.$$

Wie aus dem doppelten Vorzeichen ersichtlich, befinden sich für jeden Werth von l resp. α 2 Parabeln unter der jedes-

maligen Kegelschnittschaar. Nach einigen Umformungen ergeben sich daher die Gleichungen der beiden Parabeln:

$$\left(x\,tang\frac{\alpha}{2}+y\right)^2-2rx=0 \text{ oder}$$

$$\left(x\,cotg\frac{\alpha}{2}+y\right)^2-2rx=0.$$

Um einigermassen die Lage der beiden Parabeln kennen zu lernen, bestimmen wir die Coordinaten der Scheitel derselben. Zu dem Ende transformiren wir zuförderst die erste obiger Gleichungen auf ihren Scheitel und setzen:

$$x=x'\cos\frac{\alpha}{2}-y'\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$y=x'\sin\frac{\alpha}{2}+y'\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Alsdann erhält man:

$$\left(x'^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2x'y'\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+y'^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)tang^2\frac{\alpha}{2}+$$

$$+2\left[x'^2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}+x'y'\cos^2\frac{\alpha}{2}-x'y'\sin^2\frac{\alpha}{2}-y'^2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}\right]tang\frac{\alpha}{2}+$$

$$+x'^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2x'y'\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+y'^2.\cos\frac{\alpha}{2}-2r\left(x'\cos\frac{\alpha}{2}-y'\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

Nach gehöriger Reduction:

$$\frac{y'^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left[\sin^4\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}\right]-2r\left(x'\cos\frac{\alpha}{2}+y'\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

oder:

$$\frac{y'^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-2r\cos\frac{\alpha}{2}x'+2r\sin\frac{\alpha}{2}y'=0$$

in allgemeinen Zeichen.

$$r_2y'^2+2Dx'+2Ey'=0.$$

Schreibt man dafür:

$$r_2\left(y'+\frac{E}{r_2}\right)^2+2D\left(x'-\frac{E^2}{2Dr_2}\right)=0,$$

so sind die Coordinaten des Scheitels:

$$\eta = -\frac{E}{r_1}\,;\ \xi = \frac{E^2}{2Dr_1}.$$

Restituirt man obige Werthe für E, D und r_1, so sind die gesuchten Coordinaten des Scheitels:

$$\eta = -r\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,;\ \xi = \frac{1}{2}r\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Durch dieselbe Betrachtung ergeben sich denn auch die Scheitelcoordinaten der 2. Gleichung und zwar wird:

$$\eta = r\sin^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right);\ \xi = \frac{1}{2}r\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Der geometrische Ort der Scheitel ist eine Curve der 8. Ordnung und bietet kein weiteres Interesse dar.

Wenden wir uns jetzt zur 2. Aufgabe, bei welcher λ constant, l variabel gedacht wird und bestimmen zuerst die Mittelpunktscurve aller Kegelschnitte, die in O 3punktig berühren, die Kreisperipherie beliebig schneiden und durch einen festen Punkt der Abscissenaxe gehen, so erhält man, wenn wir $l = -\frac{2\eta}{\lambda\xi}$ in die Gleichung $\xi = \frac{4r}{4(1-\lambda) - l^2\lambda^2}$ substituiren, als Gleichung der gesuchten Mittelpunktscurve:

$$(4)\ \ldots\ldots\ \xi^2(1-\lambda) - \eta^2 - r\xi = 0,$$

welche für gewisse Werthe von λ eine Ellipse, Hyperbel, Parabel repräsentiren kann.

Wir schreiten nun zur Betrachtung der einzelnen Fälle, welche eintreten können, wenn wir gewisse Werthe für λ fixiren.

So wird für 1) $\lambda = 1$ aus Gleichung (1β):

$$(\alpha)\ \ldots\ldots\ y^2 - 2rx + lxy = 0.$$

Der Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe $x' = \frac{2r}{1-\lambda}$ rückt daher in die Unendlichkeit; die Gleichung (α) drückt somit die Schaar aller Kegelschnitte aus, die in O den Kreis 3punktig berühren, die Kreisperipherie in einem beliebigen Punkte und

die Abscissenaxe in der Unendlichkeit schneiden. Um zu erfahren, was für Kegelschnitte in diesem Falle vorkommen, ertheilen wir l, welches hier die Tangente des Neigungswinkel der Geraden mit der Ordinatenaxe bedeutet, verschiedene Werthe. Es wird:

für $l = 0$ aus Gl. (α): $y^2 = 2rx$ eine Parabel,
für $l = 1$ aus Gl. (α) $y^2 - 2rx + xy = 0$ eine Hyperbel,
für $l > 1$ od < 1 Gl. (α) $y^2 - 2rx + mxy = 0$ ebenfalls Hyperbeln,
für $l = \infty$ ergibt sich: $\frac{y^2}{\infty} - \frac{2rx}{\infty} + xy = 0$ oder $x = 0$, $y = 0$;
der Kegelschnitt ist in einen Punkt, den Coordinatenanfang degenerirt. Wie oben ermittelt, lautet die Mittelpunktscurve: $\xi^2(1-\lambda) - \eta^2 - r\xi = 0$. Dieselbe geht für $\lambda = 1$ über in: $\eta^2 = (-r)\xi$. Es liegen daher die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die für $l = 0$ bis $\pm\infty$ auftreten, auf einer Parabel, welche sich nach der negativen Seite der Abscissenaxe erstreckt.

2) $\lambda = \frac{1}{2}$. Der Durchschnitt der Kegelschnitte mit der Abscissenaxe ist hier $x = 4r$. Die Gl. (1β) verwandelt sich in: $x^2 + 2y^2 - 4rx + lxy = 0$. Diese Gleichung wird:

für $l = 0$: $x^2 + 2y^2 - 4rx = 0$ eine Ellipse,
für $l = 1$: $x^2 + 2y^2 - 4rx + xy = 0$ eine Ellipse,
für $l = 2$: $x^2 + 2y^2 - 4rx + 2xy = 0$ eine Ellipse,
für $l = 3$: $x^2 + 2y^2 - 4rx + 3xy = 0$ eine Hyperbel.

Alle grösseren Werthe als $l = 3$ liefern Hyperbeln und $l = \infty$ den Coordinatenanfang. Die Mittelpunktscurve aller dieser Kegelschnitte ist: $\xi^2 - 2\eta^2 - 2r\xi = 0$ eine Hyperbel.

3) $\lambda = 0$ lässt Gl. (1β) in die eines Kreises übergehen: $x^2 + y^2 - 2rx = 0$. Der Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe wird $x' = 2r$. Für die Grenzfälle $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ ist die Gleichung der Mittelpunktscurve nicht direct anwendbar. Wir benutzen daher mit Vortheil für diese Werthe die Mittelpunktscoordinaten und erhalten nach einer kleinen Umformung:

$$\xi = \frac{\frac{4r}{\lambda^2}}{4\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\frac{1}{\lambda}-l^2} \text{ und } \eta = \frac{\frac{-2rl}{\lambda}}{4\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\frac{1}{\lambda}-l^2}.$$

Nun ergibt sich für $\lambda = 0$: $\xi = r$, $\eta = 0$; die Mittelpunktscurve ist in den Mittelpunkt des Kreises degenerirt.

4) Für $\lambda = -1$ wird aus Gl. (1β) $2x^2 + y^2 - 2rx - lxy = 0$.

Es geht ferner $x' = \frac{2r}{1-\lambda}$ über in $x' = r$.

Für variables l erhalten wir daher folgende Schaar von Kegelschnitten, die in 0 3punktig berühren und durch Punkt $x = r$ der Abscissenaxe hindurch gehen.

$l = 0$ ergibt: $2x^2 + y^2 - 2rx = 0$ eine Ellipse,
$l = 1$ ergibt: $2x^2 + y^2 - 2rx - xy = 0$ eine Ellipse,
$l = 2$ ergibt: $2x^2 + y^2 - 2rx - 2xy = 0$ eine Ellipse,
$l = 3$ ergibt: $2x^2 + y^2 - 2rx - 3xy = 0$ eine Hyperbel.

Alle Werthe von $l > 3$ liefern Hyperbeln, bis für $l = \infty$ der Coordinatenanfang zum Vorschein kommt. Die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf einer Hyperbel, da die Mittelpunktscurve für $\lambda = 1$ die Gestalt annimmt:

$$2\xi^2 - \eta^2 - r\xi = 0.$$

5) Es sei $\lambda = -2$, dann wird die Gl. (1β):

$$3x^2 + y^2 - 2rx - 2lxy = 0.$$

Die Schaar dieser Kegelschnitte, welche bei variablem l in obiger Gleichung enthalten ist, geht durch den Punkt der Abscissenaxe $x' = \frac{2}{3}r$.

$l = 0$ ergibt: $3x^2 + y^2 - 2rx = 0$ eine Ellipse,
$l = 1$ ergibt: $3x^2 + y^2 - 2rx - 2xy = 0$ eine Ellipse,
$l = 2$ ergibt: $3x^2 + y^2 - r2x - 22xy = 0$ eine Hyperbel,
$l > 2$ liefern Hyperbeln.

Die Mittelpunktscurve lautet: $2\xi^2 - \eta^2 - r\xi = 0$ die Gleichung einer Hyperbel.

Lässt man λ weiter ins Negative wachsen, so treten für jeden grösseren Werth von λ als -2 die Kegelschnitte in derselben Reihenfolge auf, wie die unter 5) aufgeführten. Nehmen wir endlich noch 6) $\lambda = \infty$ an, so erhalten wir als Durchschnitt mit der Axe der x: $x' = 0$; die ursprüngliche Gleichung (1β) geht über in: $x^2 - lxy = 0$, woraus sich das Gleichungsystem $x = 0$ und $x = ly$ ergibt. Für $l = 0$ erhalten wir $x^2 = 0$ die doppelte Ordinatenaxe; für $l = 1$ resultirt $x = 0$, $x = y$, d. h. die Axe der y und eine unter 45^0 geneigte Gerade.

Daher ergibt sich, dass bei der Annahme $\lambda = \infty$ die Kegelschnitte sich in gerade Linien auflösen. Aus den Mittelpunktscoordinaten findet man für $\lambda = \infty$: $\xi = 0$, $\eta = 0$, d. h. den Coordinatenanfang. — Es haben sich daher folgende Resultate ergeben, welche wir hier noch einmal kurz zusammenstellen wollen:

$\lambda = 1$: $x' = \infty$	Mittelpunktscurve:	Parabel.
$\lambda = \frac{1}{2}$: $x' = 4r$	»	Hyperbel.
$\lambda = 0$: $x' = 2r$	»	Kreismittelpunkt.
$\lambda = -1$: $x' = r$	»	Hyperbel.
$\lambda = -2$: $x' = \frac{2}{3}r$	»	Hyperbel.
$\lambda = -\infty$: $x' = 0$	»	Coordinatenanfang.

Während also λ abgenommen hat von 1 bis 0, ist der Durchschnittspunkt x' der jedesmaligen Kegelschnittschaar mit der Axe der x, aus der positiven Unendlichkeit in den Endpunkt des Kreisdurchmessers gerückt; und während λ ins Negative zunahm von -1 bis $-\infty$ ist der Punkt x' von $x' = r$ in den Coordinatenanfang gelangt.

Bis jetzt haben wir λ nur die Werthe von 1 bis $-\infty$ durchlaufen lassen. Wir wollen nun im Folgenden λ von 1 $+\infty$ wachsen lassen und die auftretenden Kegelschnittschaaren mit ihren Mittelpunktscurven betrachten. Es sei daher:

1) $\lambda = +2$. Die Gl (1β) wird alsdann:

$$x^2 + y^2 - 2rx + 2lxy = 0,$$

der Durchschnittspunkt aller Kegelschnitte mit der Abscissenaxe ist $x' = -2r$. Für veränderliches l hat man ferner folgende Kegelschnitte:

Für $l = 0$: $-x^2 + y^2 - 2rx = 0$ eine Hyperbel,
» $l = 1$: $-x^2 + y^2 - 2rx + 2xy = 0$ eine Hyperbel,
» $l = 2$: $-x^2 + y^2 - 2rx + 4xy = 0$ eine Hyperbel,

sowie für grössere Werthe ebenfalls Hyperbeln. Die Mittelpunktscurve dieser Hyperbeln wird in diesem Falle:

$$\xi^2 + \eta^2 + r\xi = 0,$$

d. h. ein Kreis, beschrieben mit dem Radius $= \frac{r}{2}$.

2) $\lambda = +3$ liefert als Schnittpunkt mit der Axe der x: $x' = -r$; Gl. (1β) verwandelt sich in:

$$x^2(1-3) + y^2 - 2rx + 3lxy - 0,$$

welche Gleichung nur einer Hyperbel angehören kann, was für Werthe von l man auch wählen mag. Für $l = \infty$ degenerirt die Gleichung wieder in den Coordinatenanfang. Die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln liegen auf einer Ellipse:
$-2\xi^2 - \eta^2 - r\xi = 0$.

3) $\lambda = +\infty$ verwandelt Gl. (1β) in die schon oben erwähnten Geraden $x = 0$ und $x = ly$.

Uebersicht:

$\lambda = 1$:	$x' = \infty$	Mittelpunktscurve: Parabel.
$\lambda = 2$:	$x' = -2r$	» Kreis.
$\lambda = 3$:	$x' = -r$	» Ellipse.
$\lambda = \infty$:	$x' = 0$	» Coordinatenanfang.

So ist denn, während λ zunahm von 1 bis 2, der Schnittpunkt x' aus der negativen Unendlichkeit in den Punkt $x' = -2r$ gerückt; und während λ wuchs von 2 bis $+\infty$, hat sich der Punkt x' von $x' = -2r$ in den Coordinatenanfang bewegt.

Curriculum vitae.

Als Sohn des Oeconomen Adolf Schindler zu Hof Eich bei Gelnhausen bin ich am 14. August 1858 daselbst geboren und verblieb bis zu meinem 11. Jahre im elterlichen Hause.

Ostern 1870 trat ich in das Gymnasium zu Hanau ein, welcher Anstalt ich 6 Jahre angehörte. Von hier siedelte ich auf das Grossherzogliche Gymnasium zu Büdingen über und wurde im Frühjahr 1879 mit dem Zeugniss der Reife entlassen.

Die beiden ersten Semester verbrachte ich auf der Universität Halle, wo ich mich anfangs dem Studium der Landwirthschaft widmete, im Herbste aber zum Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften übergieng. Im Sommersemester 1880 begab ich mich nach Marburg und beendigte nach zweijährigem Aufenthalt meine Studien.

Meine Lehrer waren in Halle die Herren Professoren:

Cantor, Knoblauch, Kühn, Pütz;

in Marburg:

Bergmann, Dunker, v. Drach, Greeff, Hess, Klocke, Melde, Stegmann, Wiegand.

Ihnen Allen sage ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank.

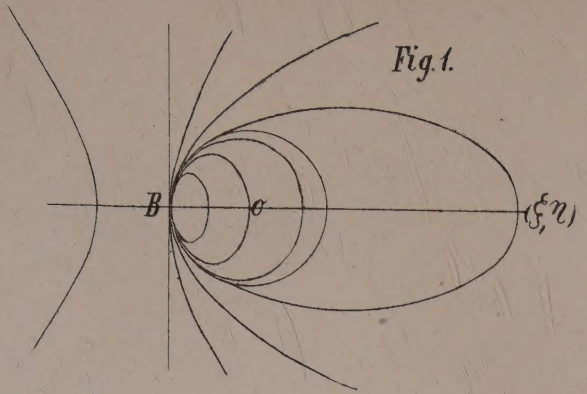

Fig.1.

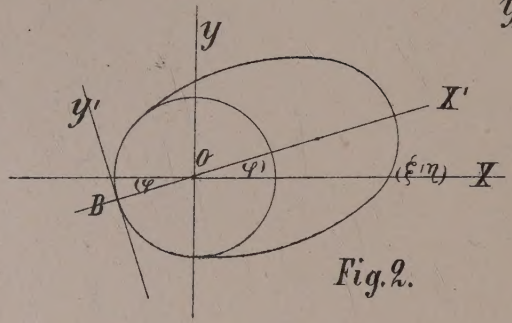

Fig.2.

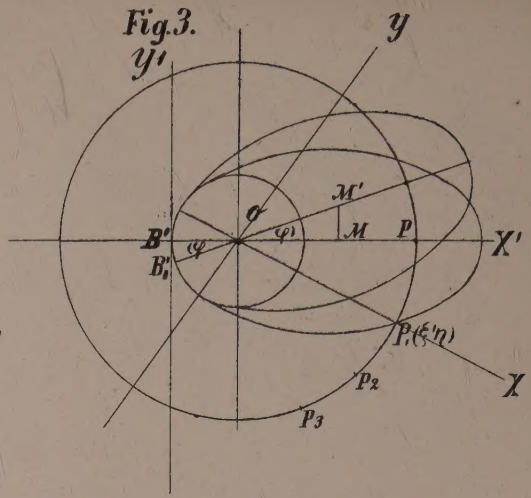

Fig.3.

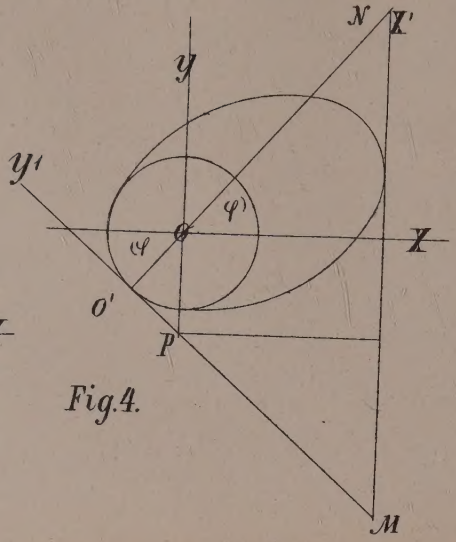

Fig.4.

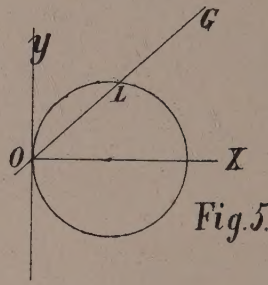

Fig.5.